FUNZIONI ELEMENTARI - ESERCIZI SVOLTI

1) Determinare il dominio delle seguenti funzioni di variabile reale:

$$(a) \quad f(x) = \sqrt{x^2-4} \qquad\qquad (b) \quad f(x) = \log(\sqrt{x+2}-x)$$

$$(c) \quad f(x) = \sqrt[4]{|x|-|x+2|} \qquad\qquad (d) \quad f(x) = \frac{1}{4^x - 5\cdot 2^x + 6}$$

2) Data la funzione f determinare l'immagine $f(X)$ dell'insieme X e la controimmagine $f^{-1}(Y)$ dell'insieme Y:

$$(a) \quad f(x) = x^2, X = [1,2], Y = [1,4] \qquad\qquad (b) \quad f(x) = |x|, X = \{1\}, Y = \{-5\}$$

$$(c) \quad f(x) = x^3, X =]1,8], Y = \{-1\} \qquad\qquad (d) \quad f(x) = \sin x, X = \{0\}, Y = \{0\}$$

3) Data la funzione $f(x) = |x^2-2x|$, determinare il dominio e tracciare il grafico. Determinare quindi l'immagine $f(X)$ dell'insieme $X = [0,1[$ e la controimmagine $f^{-1}(Y)$ dell'insieme $Y = [0,1[$.

4) Data la funzione $f(x) = \frac{x^2-1}{x+5}$, determinare la controimmagine $f^{-1}(Y)$ dell'insieme $Y = [0,1]$.

5) Data la funzione $f(x) = 2x^3 - 1$, determinare l'immagine $f(X)$ dell'insieme $X = [-1,2]$.

6) Verificare che $f(x) = 2x-1$ è iniettiva e suriettiva su $\mathbb{R}$.

7) Determinare il dominio di $f(x) = 3 + \sqrt{x+1}$ e verificare che è iniettiva su $\mathrm{dom}(f)$. Determinare inoltre l'immagine di f e verificare che f non è suriettiva su $\mathbb{R}$.

8) Tracciare il grafico delle funzioni $f(x) = |x|$, $g(x) = |x+1|$, $h(x) = |x-1|$, $l(x) = |x| + 1$, $m(x) = |x| - 1$.

9) Tracciare il grafico delle funzioni $f(x) = \sin x$, $g(x) = 2\sin x$, $h(x) = \sin(2x)$, $l(x) = \sin(\frac{x}{2})$, $m(x) = \frac{1}{2}\sin(x)$.

10) Tracciare il grafico delle funzioni $f(x) = \log x$, $g(x) = -\log x$, $h(x) = |\log x|$, $l(x) = \log(-x)$, $m(x) = \log|x|$.

11) Determinare il dominio e tracciare il grafico della funzione $f(x) = 2 + \log(x+3)$.

12) Determinare i domini e tracciare i grafici delle seguenti funzioni

$$(a)\quad f(x) = |x^2 + x - 2| \qquad (b)\quad f(x) = 2 - |x+3|$$

$$(c)\quad f(x) = 2 - \sqrt{x+1} \qquad (d)\quad f(x) = ||x+1| - 1|$$

13) Determinare dominio e immagine di $f(x) = 3x + 1$. Verificare che f è strettamente crescente su $\mathbb{R}$. Determinare l'espressione di f^{-1}. Tracciare i grafici di f e f^{-1}.

14) Determinare il dominio e tracciare il grafico della funzione $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$. Verificare che f è iniettiva e calcolare la funzione inversa f^{-1}.

15) Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 5 - 2x & \text{se } 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Dire se f è monotona (e, in particolare, strettamente monotona) su $[0,1[$, su $[1,2]$ e su $[0,2]$. Verificare che f è iniettiva sul suo dominio e determinare la sua immagine. Determinare la funzione inversa f^{-1}.

16) Verificare che le restrizioni di $f(x) = x^2$ a $\mathbb{R}_-$ e $\mathbb{R}_+$ sono strettamente monotone. Dette $f_1 = f_{|\mathbb{R}_-}$, $f_2 = f_{|\mathbb{R}_+}$ tali restrizioni, calcolare le corrispondenti funzioni inverse g_1, g_2, e tracciarne i grafici.

17) Data $f(x) = x|x-2| + 2x$, tracciare il grafico, verificare che f è invertibile, determinare la funzione inversa f^{-1}.

18) Data $f(x) = (x-1)|x+2|$, determinare gli intervalli in cui f è strettamente monotona, e le funzioni inverse relative alle corrispondenti restrizioni.

19) Verificare che la funzione $f(x) = x^4$ è limitata su $[-2, 3]$, superiormente illimitata su $\mathbb{R}$, inferiormente limitata su $\mathbb{R}$.

20) Determinare il dominio e tracciare il grafico della funzione $f(x) = \left|\frac{1}{x} + 1\right|$. Verificare che f è inferiormente limitata sul suo dominio. Determinare $\min\{f(x) : x \in \mathrm{dom}(f)\}$. Verificare che f è superiormente illimitata sul suo dominio, ma è limitata su $]-\infty, -1]$. Calcolare $\sup\{f(x) : x \in]-\infty, -1]\}$ e mostrare che f non ha massimo su tale intervallo.

21) Date le funzioni $f(x) = x - \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{x-2}$, determinare i domini e le espressioni esplicite delle funzioni $g \circ f$ e $f \circ g$.

22) Date le funzioni $f(x) = x^2 + 3x$ e $g(x) = |x|$, determinare i domini e le espressioni esplicite delle funzioni $g \circ f$ e $f \circ g$. Tracciare quindi i grafici di $g \circ f$ e $f \circ g$.

23) Date le funzioni $f(x) = 1 + x^2$, $g(x) = \frac{1}{x}$, determinare dominio, immagine, intervalli di monotonia. Tracciare quindi il grafico della funzione composta $g \circ f$.

24) Date le funzioni $f(x) = -\frac{1}{x}$, $g(x) = e^x$, determinare dominio, immagine, intervalli di monotonia. Tracciare quindi il grafico della funzione composta $g \circ f$.

SOLUZIONI

1)

1a) Per determinare il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{x^2-4}$ occorre trovare i valori $x \in \mathbb{R}$ per cui $x^2 - 4 \geq 0$. Risolvendo la disequazione si trova $x \leq -2$ e $x \geq 2$. Pertanto $\mathrm{dom}(f) =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$.

1b) Per determinare il dominio della funzione $f(x) = \log(\sqrt{x+2} - x)$ occorre trovare i valori $x \in \mathbb{R}$ per cui $\sqrt{x+2} - x > 0$. La disequazione è soddisfatta se e solo se x verifica uno dei due sistemi

$$\begin{cases} x < 0 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ x + 2 \geq 0 \\ x + 2 > x^2. \end{cases}$$

Il primo sistema è soddisfatto per $-2 \leq x < 0$, ed il secondo per $0 \leq x < 2$. Complessivamente la disequazione data è soddisfatta per $-2 \leq x < 2$. Pertanto $\mathrm{dom}(f) = [-2, 2[$.

1c) Per determinare il dominio della funzione $f(x) = \sqrt[4]{|x| - |x+2|}$ occorre trovare i valori $x \in \mathbb{R}$ per cui $|x| - |x+2| \geq 0$. La disequazione è soddisfatta se e solo se x verifica uno dei tre sistemi

$$\begin{cases} x < -2 \\ -x \geq -x - 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2 \leq x \leq 0 \\ -x \geq x + 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ x \geq x + 2. \end{cases}$$

Il primo sistema è soddisfatto per $x < -2$, il secondo per $-2 \leq x \leq -1$, mentre il terzo non ha soluzioni. Complessivamente la disequazione data è soddisfatta per $x \leq -1$. Pertanto $\mathrm{dom}(f) =]-\infty, -1]$.

1d) Per determinare il dominio della funzione $f(x) = \frac{1}{4^x - 5 \cdot 2^x + 6}$ occorre escludere i valori $x \in \mathbb{R}$ per cui $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$. Ponendo $2^x = t$ ci si riconduce all'equazione $t^2 - 5t + 6 = 0$ che ha soluzioni $t_1 = 2$ e $t_2 = 3$. Poiché $2^x = t$ equivale a $x = \log_2 t$, per $t > 0$, si ricava $x_1 = \log_2 2 = 1$ e $x_2 = \log_2 3$. Pertanto $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1, \log_2 3\}$.

2) Data la funzione f per determinare l'immagine $f(X)$ dell'insieme X e la controimmagine $f^{-1}(Y)$ dell'insieme Y occorre fare riferimento alle definizioni di immagine e controimmagine di insiemi. Precisamente:

$$f(X) = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in X \text{tale che } f(x) = y\}$$

$$f^{-1}(Y) = \{x \in \mathrm{dom}(f) : f(x) \in Y\}.$$

2a) Data la funzione $f(x) = x^2$, dall'esame del grafico, che è rappresentato da una parabola, otteniamo facilmente che $f(X) = f([1,2]) = [1,4]$. Questo risultato si può giustificare in modo rigoroso osservando che $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, f è crescente nell'intervallo $[1,2]$ (quindi $1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq x^2 \leq 4$) e continua (quindi, per il Teorema dei valori intermedi, f assume *tutti* i valori compresi tra 1 e 4). Per calcolare $f^{-1}(Y) = f^{-1}([1,4])$ possiamo invece determinare le soluzioni della coppia di disequazioni $1 \leq x^2 \leq 4$, cioè del sistema

$$\begin{cases} x^2 \geq 1 \\ x^2 \leq 4 \end{cases}$$

ed otteniamo subito che $f^{-1}(Y) = [-2,-1] \cup [1,2]$. Il risultato trova conferma nell'osservazione del grafico della parabola.

2b) L'immagine di un insieme formato da un solo elemento coincide con l'immagine di tale elemento, quindi $f(X) = f(\{1\}) = f(1) = |1| = 1$. Per trovare la controimmagine di $Y = \{-1\}$ occorre risolvere l'equazione $|x| = -5$. Tale equazione non ha soluzioni: pertanto $f^{-1}(Y) = \emptyset$.

2c) Data la funzione $f(x) = x^3$, dall'esame del grafico otteniamo facilmente che $f(X) = f([1,8]) = [1,8^3]$. Come per l'esercizio 2a), questo risultato si può giustificare in modo rigoroso osservando che $f(1) = 1$, $f(8) = 8^3$, f è crescente (quindi $1 \leq x \leq 8 \Rightarrow 1 \leq x^3 \leq 8^3$) e continua (quindi, per il Teorema dei valori intermedi, f assume *tutti* i valori compresi tra 1 e 8^3). Per calcolare $f^{-1}(Y) = f^{-1}(-1)$ possiamo invece determinare le soluzioni dell'equazione $x^3 = -1$ ed otteniamo subito che $f^{-1}(Y) = \{-1\}$. Il risultato trova conferma nell'osservazione del grafico di f.

2d) Data $f(x) = \sin x$ si ha $f(X) = f(\{0\}) = f(0) = \sin 0 = 0$. Per determinare $f^{-1}(Y) = f^{-1}(\{0\})$ occorre risolvere l'equazione $\sin x = 0$. La soluzione è $f^{-1}(Y) = \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$.

3) La funzione $f(x) = |x^2 - 2x|$, è definita per ogni valore di $x \in \mathbb{R}$, pertanto $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$. Per tracciarne il grafico, tenendo conto che, in base alla definizione di valore assoluto

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x^2 - 2x \geq 0 \\ -(x^2 - 2x) & \text{se } x^2 - 2x < 0 \end{cases}$$

possiamo disegnare preliminarmente quello di $g(x) = x^2 - 2x$ (parabola), e "ribaltare" poi rispetto all'asse x le parti del grafico di g corrispondenti ad ordinate negative. Si ottiene così il grafico riportato in figura 1. L'immagine $f(X)$ dell'insieme $X = [0,1[$, sulla base del grafico, risulta essere l'insieme $f(X) = [0,1[$. Il risultato è motivato dal fatto che $f(0) = 0$, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$, f è continua e per $x \in X$ $f(x) = -(x^2 - 2x)$ è crescente. Per determinare $f^{-1}(Y) = f^{-1}([0,1[)$ si può risolvere la coppia di disequazioni $0 \leq |x^2 - 2x| < 1$. La prima disequazione è sempre soddisfatta, e quindi basta risolvere la seconda disequazione $|x^2 - 2x| < 1$. In base alla definizione di valore assoluto occorre risolvere i due sistemi

$$\begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ x^2 - 2x < 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x^2 - 2x < 0 \\ -(x^2 - 2x) < 1 \end{cases}$$

Il primo sistema ha soluzione $]1 - \sqrt{2}, 0] \cup [2, 1 + \sqrt{2}[$, ed il secondo $]0, 2[\setminus\{1\}$. Considerando l'unione di tali insiemi si trova che $f^{-1}(Y) =]1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}[\setminus\{1\}$. Il risultato trova conferma nell'osservazione del grafico di f.

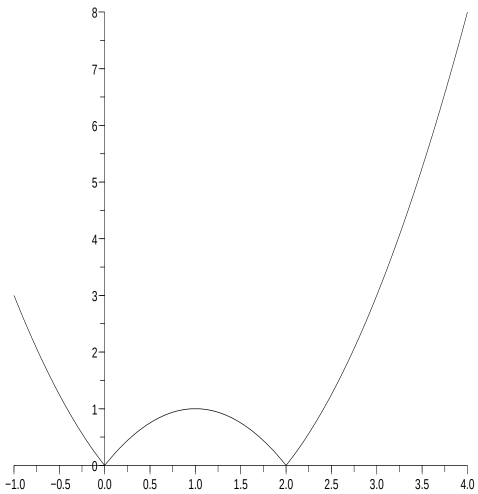

Fig. 1: Grafico di $f(x) = |x^2 - 2x|$, (esercizio 3)

4) Data la funzione $f(x) = \frac{x^2-1}{x+5}$, per determinare la controimmagine $f^{-1}(Y)$ dell'insieme $Y = [0, 1]$ si può risolvere la coppia di disequazioni $0 \leq \frac{x^2-1}{x+5} \leq 1$, ovvero il sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2-1}{x+5} \geq 0 \\ \\ \frac{x^2-1}{x+5} \leq 1 \end{cases}$$

La soluzione è $f^{-1}(Y) = [-2, -1] \cup [1, 3]$.

5) Data la funzione $f(x) = 2x^3 - 1$, per determinare l'immagine $f(X)$ dell'insieme $X = [-1, 2]$ può essere utile tracciare il grafico di f. Esso si ottiene facilmente da quello di $y = x^3$, tenendo conto che il prodotto per la costante 2 comporta una dilatazione in senso verticale (equivale ad un cambiamento di scala sull'asse y), mentre sottrarre 1 corrisponde a traslare in basso di una lunghezza pari a 1 il grafico di $y = 2x^3$. L'osservazione del grafico di f così ottenuto

suggerisce che f sia, come $y = x^3$, una funzione crescente e continua su $\mathbb{R}$. La monotonia può essere verificata direttamente:

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1^3 < x_2^3 \quad \Rightarrow \quad 2x_1^3 < 2x_2^3 \quad \Rightarrow \quad 2x_1^3 - 1 < 2x_2^3 - 1$$

La continuità segue dal fatto che $f(x)$ è un polinomio. Pertanto, per il Teorema dei valori intermedi $f(X) = f([-1, 2]) = [f(-1), f(2)] = [-3, 15]$.

6) Per verificare che $f(x) = 2x - 1$ è iniettiva su $\mathbb{R}$ basta mostrare che se $f(x_1) = f(x_2)$ allora $x_1 = x_2$. Supponiamo quindi $2x_1 - 1 = 2x_2 - 1$; aggiungendo 1 ad entrambi i membri si ha $2x_1 = 2x_2$, da cui, dividendo per 2, segue subito $x_1 = x_2$.

   Per mostrare che f è suriettiva su $\mathbb{R}$ occorre provare che per ogni $y \in \mathbb{R}$ esiste almeno una soluzione dell'equazione $f(x) = y$. Dato un generico $y \in \mathbb{R}$ risolviamo quindi l'equazione $2x - 1 = y$. Si trova subito $x = \frac{y+1}{2}$. La suriettività di f è così dimostrata.

7) Per determinare il dominio di $f(x) = 3 + \sqrt{x+1}$ occorre determinare i valori di $x \in \mathbb{R}$ per cui $x + 1 \geq 0$. Si ha quindi $\text{dom}(f) = [-1, +\infty[$. Per verificare che f è iniettiva su $\text{dom}(f)$ supponiamo $x_1, x_2 \geq -1$ tali che $3 + \sqrt{x_1 + 1} = 3 + \sqrt{x_2 + 1}$. Sottraendo 3 ad entrambi i membri si ha $\sqrt{x_1 + 1} = \sqrt{x_2 + 1}$, da cui, elevando al quadrato, segue $x_1 + 1 = x_2 + 1$ e quindi $x_1 = x_2$. Ciò prova che f è iniettiva. Per verificare che f non è suriettiva su $\mathbb{R}$ basta trovare un valore $y \in \mathbb{R}$ che non ha controimmagine mediante f, cioè tale che l'equazione $f(x) = y$ non abbia soluzione. Osserviamo che per ogni $x \geq -1$ si ha $3 + \sqrt{x+1} \geq 3$, in quanto $\sqrt{x+1} \geq 0$. Pertanto $y < 3$ non ha controimmagine. Risulta quindi provato che f non è suriettiva su $\mathbb{R}$.

8) Vogliamo tracciare il grafico delle funzioni $g(x) = |x + 1|$, $h(x) = |x - 1|$, $l(x) = |x| + 1$, $m(x) = |x| - 1$ a partire dal grafico della funzione nota $f(x) = |x|$. Osserviamo che $g(x) = f(x+1)$, ovvero: $(x+1, y)$ è un punto del grafico di f se e solo se (x, y) è un punto del grafico di g. Ciò significa che il grafico di g si può ottenere traslando orizzontalmente "a sinistra" di una lunghezza 1 quello di f. Analogamente, poiché $h(x) = f(x - 1)$, il grafico di h si può ottenere traslando orizzontalmente "a destra" di una lunghezza 1 quello di f. Osserviamo invece che $l(x) = f(x) + 1$, ovvero (x, y) è punto del grafico di f se e solo se $(x, y + 1)$ è punto del grafico di f. Pertanto il grafico di l si può ottenere traslando verticalmente "in alto" di una lunghezza 1 quello di f. Analogamente, poiché $m(x) = f(x) - 1$, il grafico di m si può ottenere traslando verticalmente "in basso" di una lunghezza 1 quello di f. I grafici sono riportati in figura 2.

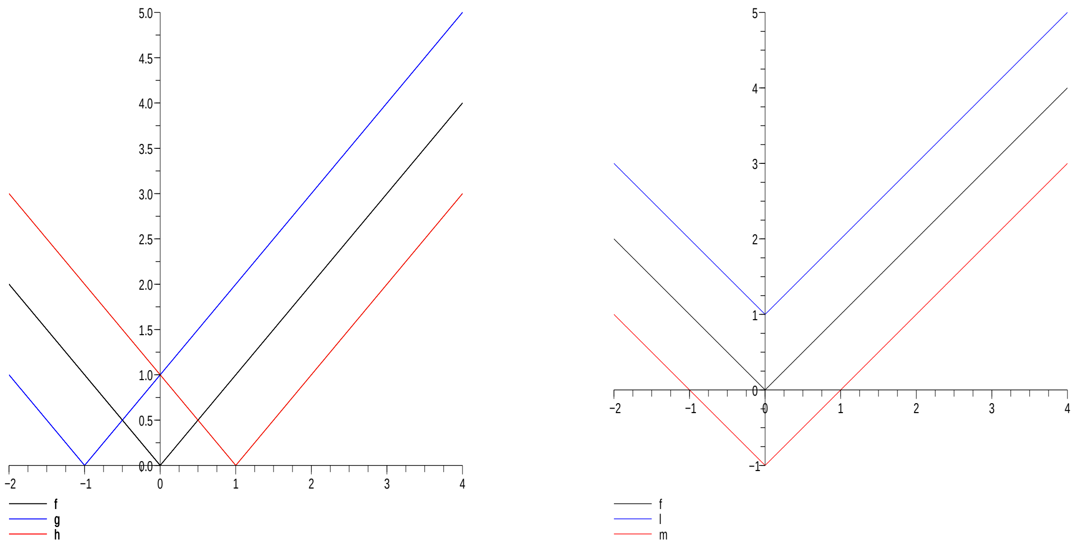

Fig. 2: Grafico di $f(x) = |x|$, $g(x) = |x+1|$, $h(x) = |x-1|$, $l(x) = |x|+1$, $m(x) = |x|-1$ (esercizio 8)

9) Vogliamo tracciare il grafico delle funzioni $g(x) = 2\sin x$, $h(x) = \sin(2x)$, $l(x) = \sin(\frac{x}{2})$, $m(x) = \frac{1}{2}\sin x$ a partire da quello noto di $f(x) = \sin x$. Osserviamo che, essendo $g(x) = 2f(x)$, il punto (x, y) appartiene al grafico di f se e solo se $(x, 2y)$ appartiene al grafico di g. Pertanto si può ottenere il grafico di g "dilatando" verticalmente di un fattore 2 quello di f. In modo analogo, si ottiene quello di m "contraendo" verticalmente quello di f di un fattore $1/2$. Inoltre, essendo $h(x) = f(2x)$, si ha che (x, y) appartiene al grafico di h se e solo se $(2x, y)$ appartiene al grafico di f. Pertanto il grafico di h si può ottenere contraendo orizzontalmente quello di f di un fattore $1/2$. In modo analogo, il grafico di l si può ottenere dilatando quello di f di un fattore 2. I grafici sono riportati in figura 3.

10) Vogliamo tracciare il grafico delle funzioni $g(x) = -\log x$, $h(x) = |\log x|$, $l(x) = \log(-x)$, $m(x) = \log|x|$ a partire dal grafico noto di $f(x) = \log x$. Osserviamo che $g(x) = -f(x)$, da cui segue che (x, y) appartiene al grafico di g se e solo se $(x, -y)$ appartiene al grafico di f. Pertanto il grafico di g si può ottenere "ribaltando" quello di f rispetto all'asse x. Invece, essendo $l(x) = f(-x)$, si ha che $x \in \mathrm{dom}(l)$ se e solo se $-x \in \mathrm{dom}(f)$, ed inoltre (x, y) appartiene al grafico di l se e solo se $(-x, y)$ appartiene a quello di f. Pertando i due domini sono simmetrici rispetto all'origine, ed i grafici sono simmetrici rispetto all'asse y, e quindi quello di l si ottiene ribaltando il grafico di f rispetto all'asse y. Per disegnare il grafico di

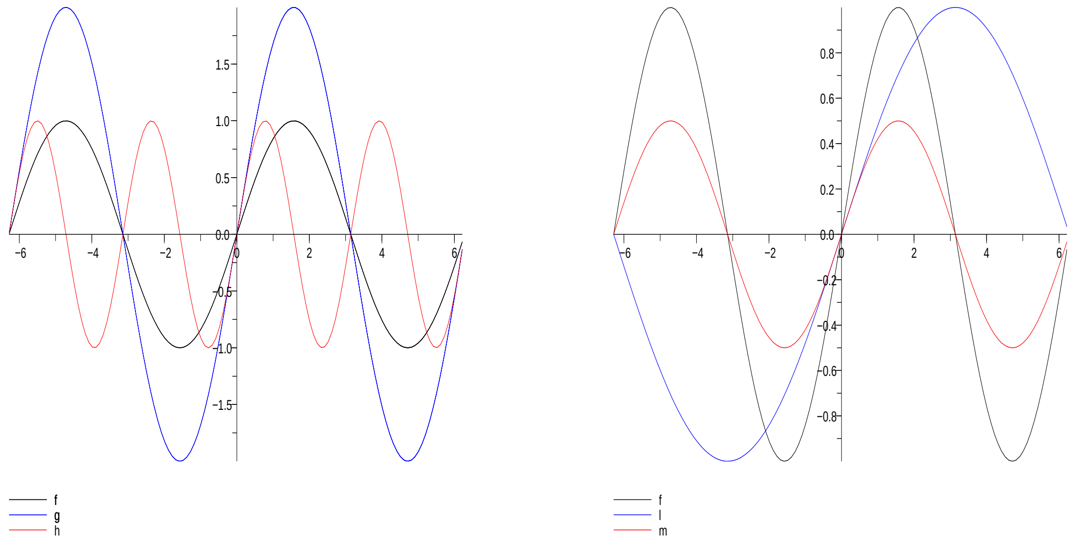

Fig. 3: Grafico di $f(x) = \sin x$, $g(x) = 2\sin x$, $h(x) = \sin(2x)$, $l(x) = \sin(\frac{x}{2})$, $m(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ (esercizio 9)

$h(x) = |f(x)|$ si deve tenere conto della definizione di valore assoluto, per cui

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

In conclusione, il grafico di h coincide con quello di f dove i punti del grafico di f hanno ordinata positiva o nulla, e si ottiene per ribaltamento rispetto all'asse x dove i punti del grafico di f hanno ordinata negativa. Per quanto riguarda $m(x) = f(|x|)$, osserviamo che $x \in \text{dom}(m)$ se e solo se $|x| \in \text{dom}(f)$, e

$$m(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Pertanto $\text{dom}(m) = \text{dom}(f) \cup \text{dom}(l)$ ed il grafico di m è l'unione dei grafici di f e l. I grafici sono riportati in figura 4 e 5.

11) Per determinare il dominio della funzione $f(x) = 2 + \log(x+3)$ occorre trovare i valori $x \in \mathbb{R}$ tali che $x + 3 > 0$; pertanto $\text{dom}(f) =]-3, +\infty[$. Per tracciare il grafico di f a partire dal grafico noto di $y = \log x$ basta traslare quest'ultimo orizzontalmente a sinistra di 3 e verticalmente in alto di 2. Il grafico è riportato in figura 6.

12a) La funzione $f(x) = |x^2 + x - 2|$ è definita su tutto $\mathbb{R}$. Il grafico si può ottenere da quello della parabola $y = x^2 + x - 2$, ribaltando rispetto all'asse y le parti corrispondenti a punti con ordinata negativa. Il grafico è riportato in figura 7.

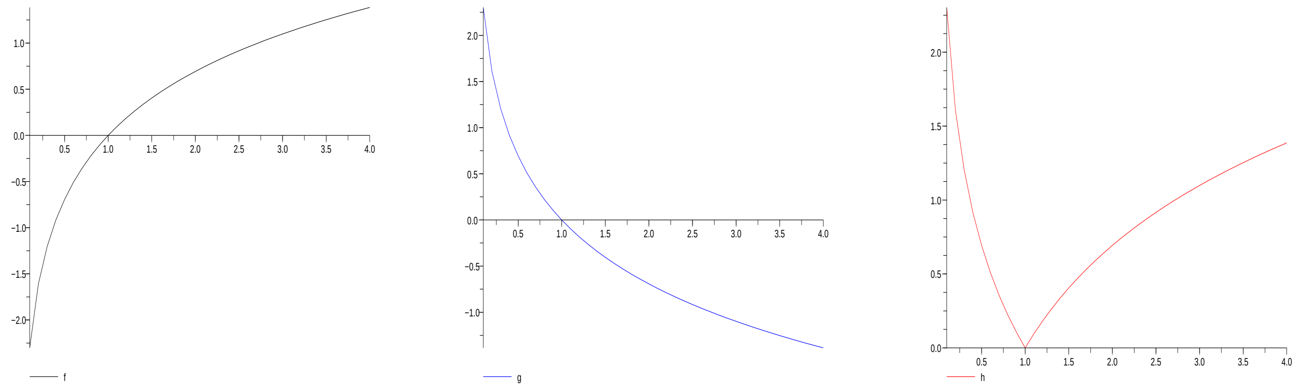

Fig. 4: Grafico di $f(x) = \log x$, $g(x) = -\log x$, $h(x) = |\log x|$ (esercizio 10)

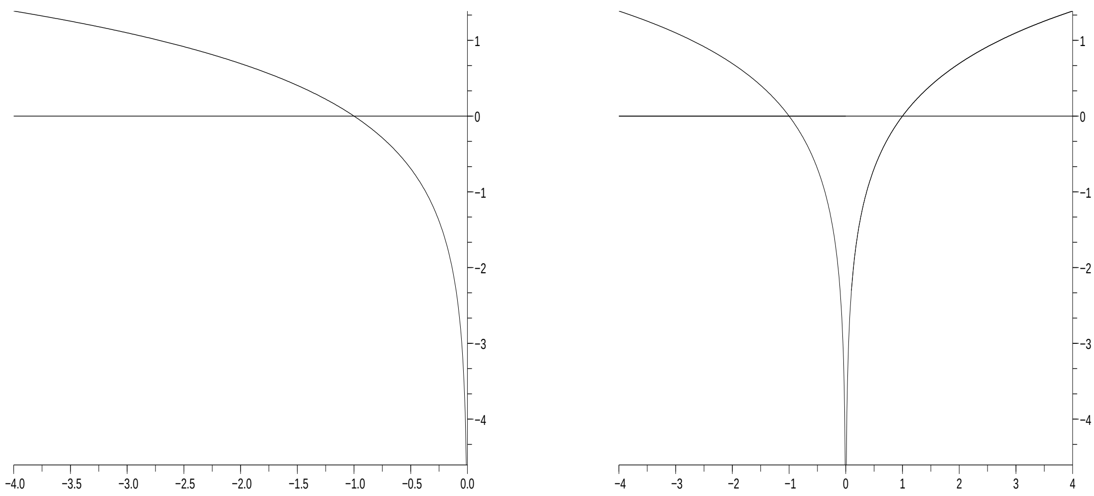

Fig. 5: Grafico di $l(x) = \log(-x)$, $m(x) = \log|x|$ (esercizio 10)

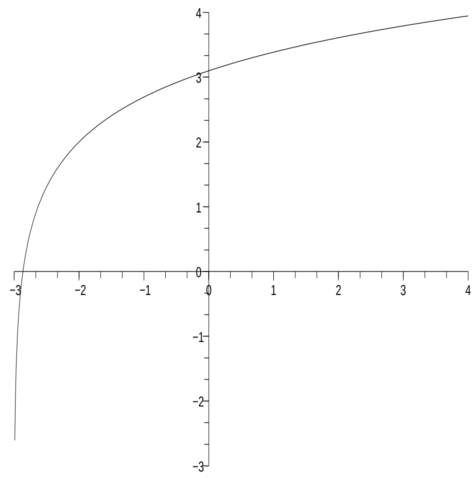

Fig. 6: Grafico di $f(x) = 2 + \log(x+3)$ (esercizio 11)

12*b*) La funzione $f(x) = 2 - |x+3|$ è definita su tutto $\mathbb{R}$. Il grafico si può ottenere da quello di $y = |x|$ operando una traslazione orizzontale a sinistra di 3, un ribaltamento rispetto all'asse y, ed infine una traslazione verticale in alto di 2. In alternativa, considerata la definizione di valore assoluto, si può riscrivere l'espressione di $f(x)$ come segue

$$f(x) = \begin{cases} 2 - (x+3) & \text{se } x+3 \geq 0 \\ 2 + (x+3) & \text{se } x+3 < 0 \end{cases}$$

ovvero

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{se } x \geq -3 \\ x+5 & \text{se } x < -3 \end{cases}$$

Il grafico è riportato in figura 7.

12*c*) Il dominio di $f(x) = 2 - \sqrt{x+1}$ è l'insieme dei valori $x \in \mathbb{R}$ tali che $x+1 \geq 0$; pertanto $\mathrm{dom}(f) = [-1, +\infty[$. Per ottenere il grafico di f a partire da quello noto di $y = \sqrt{x}$ si può traslare orizzonatalmente quest'ultimo a sinistra di 1, poi ribaltare rispetto all'asse x, ed infine traslare verticalmente in alto di 2. Il grafico di f è riportato in figura 8.

12*d*) Il dominio di $f(x) = ||x+1| - 1|$ è l'insieme $\mathbb{R}$. Per tracciare il grafico di f a partire da quello noto di $y = |x|$ è possibile traslare orizzontalmente quest'ultimo a sinistra di 1, quindi verticalmente in basso di 1, ed infine ribaltare rispetto all'asse y le parti corrispondenti ad ordinata negativa. In alternativa, si può riscrivere l'espressione di f come segue:

$$f(x) = \begin{cases} |x+1| - 1 & \text{se } |x+1| - 1 \geq 0 \\ 1 - |x+1| & \text{se } |x+1| - 1 < 0 \end{cases}$$

Ma

$$|x+1|-1=\begin{cases} x & \text{se } x+1\geq 0 \\ -x-2 & \text{se } x+1<0 \end{cases}=\begin{cases} x & \text{se } x\geq -1 \\ -x-2 & \text{se } x<-1 \end{cases}.$$

Quindi, essendo $|x+1|-1\geq 0$ per $x\leq -2$ e per $x\geq 0$, risulta

$$f(x)=\begin{cases} -x-2 & \text{se } x\leq -2 \\ x+2 & \text{se } -2<x<-1 \\ -x & \text{se } -1<x<0 \\ x & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$$

Il grafico è riportato in figura 8.

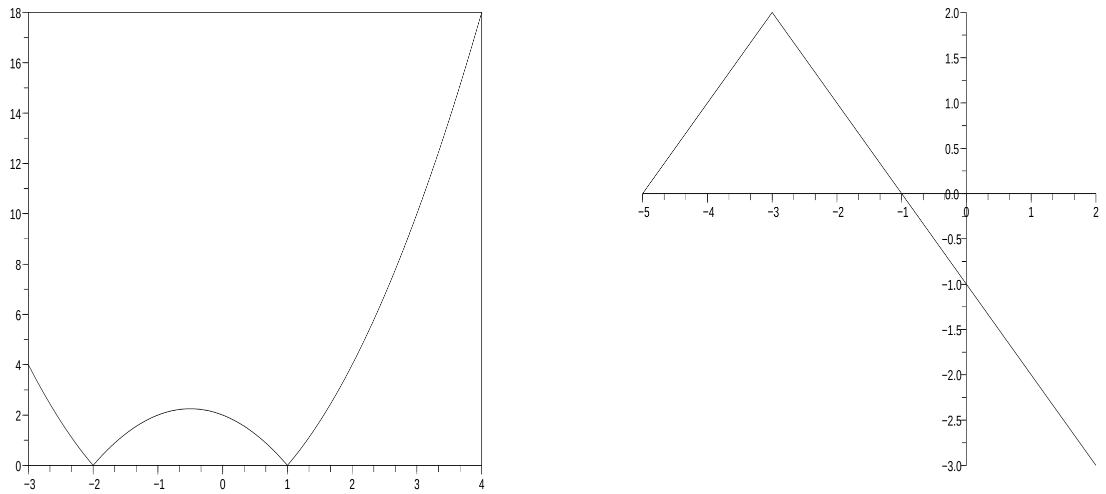

Fig. 7: Grafico di $f_a(x)=|x^2+x-2|$, $f_b(x)=2-|x+3|$ (esercizio 12a, 12b)

13) La funzione $f(x)=3x+1$ ha dominio $\mathbb{R}$. Per calcolarne l'immagine basta determinare i valori $y\in\mathbb{R}$ tali che l'equazione $f(x)=y$, ovvero $3x+1=y$, ammetta almeno una soluzione. Poiché qualunque sia y l'equazione ammette soluzione (unica) $x=\frac{y-1}{3}$, segue che $\operatorname{Im}(f)=\mathbb{R}$. Per verificare che f è strettamente crescente su $\mathbb{R}$, presi $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ tali che $x_1<x_2$ osserviamo che $3x_1<3x_2$ ed anche $3x_1+1<3x_2+1$, ovvero $f(x_1)<f(x_2)$. Dalla stretta monotonia di f segue la sua iniettività. Per determinare l'espressione di f^{-1}, tenendo conto della definizione di funzione inversa, basta porre $f^{-1}(x)=y$ se e solo se $f(y)=x$, ovvero $3y+1=x$. Risolvendo quest'ultima equazione si ha $y=\frac{x-1}{3}=f^{-1}(x)$. I grafici di f e f^{-1} sono simmetrici rispetto alla retta $y=x$ e sono riportati in figura 9.

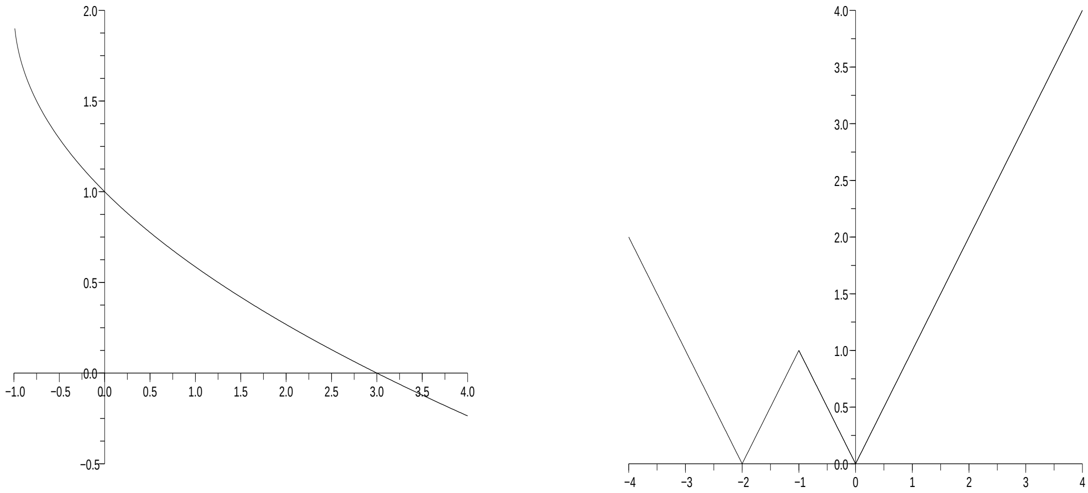

Fig. 8: Grafico di $f_c(x) = 2 - \sqrt{x+1}$, $f_d(x) = ||x+1| - 1|$ (esercizio 12c, 12d)

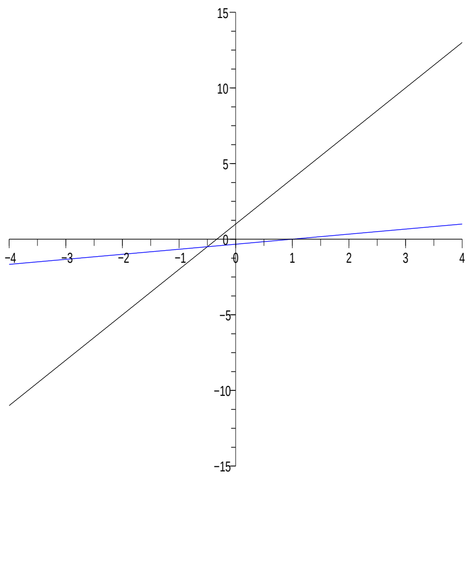

Fig. 9: Grafico di $f(x) = 3x + 1$, $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$ (esercizio 13)

14) Data la funzione $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ si ha $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Per verificare che f è iniettiva supponiamo $x_1, x_2 \in \mathrm{dom}(f)$ tali che $f(x_1) = f(x_2)$, ovvero

$$\frac{2x_1+1}{x_1-1} = \frac{2x_2+1}{x_2-1}$$

da cui

$$(2x_1+1)(x_2-1) = (2x_2+1)(x_1-1).$$

Calcolati i prodotti e eliminati i termini uguali nei due membri dell'uguaglianza si ottiene $3x_2 = 3x_1$ da cui segue $x_2 = x_1$: l'iniettività di f è così provata. La funzione inversa f^{-1} si determina ponendo $f^{-1}(x) = y$ se e solo se $f(y) = x$, ovvero

$$\frac{2y+1}{y-1} = x$$

Ricavando y in funzione di x si trova

$$y = f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

Il grafico di f è riportato in figura 10.

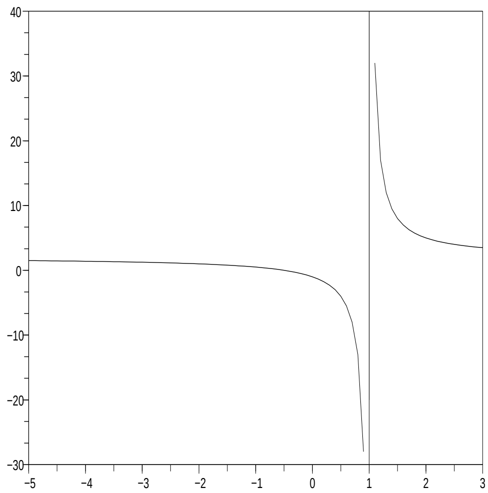

Fig. 10: Grafico di $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ (esercizio 14)

15) Il grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 5-2x & \text{se } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

è riportato in figura 11. La funzione f è strettamente crescente su $[0,1[$ in quanto se $0 \leq x_1 < x_2$, moltiplicando le disuguaglianze per x_1 segue $0 \leq x_1^2 < x_1 \cdot x_2$; moltiplicando invece per x_2 si ha $0 \leq x_1 \cdot x_2 < x_2^2$; complessivamente segue $0 \leq x_1^2 < x_2^2$. Inoltre f è strettamente decrescente su $[1,2]$, in quanto da $0 \leq x_1 < x_2$ segue $-x_2 < -x_1$ e quindi $-2x_2 < -2x_1$, da cui $5 - 2x_2 < 5 - 2x_1$, cioè $f(x_1) > f(x_2)$. Ovviamente f non è monotona su $[0,2]$. Ciononostante, f è iniettiva sul suo dominio. Per verificarlo, supponiamo $f(x_1) = f(x_2)$. Se $x_1, x_2 \in [0,1[$, o $x_1, x_2 \in [1,2]$, dalla stretta monotonia di f in tali intervalli segue subito che $x_1 = x_2$. Se invece, ad esempio $x_1 \in [0,1[$, $x_2 \in [1,2]$, non può essere $f(x_1) = f(x_2)$, ovvero $x_1^2 = 5-2x_2$, in quanto $x_1^2 \in [0,1[$, e $5-2x_2 \in [1,3]$. Infatti $f([0,1[) = [0,1[$ e $f([1,2]) = [1,3]$. Si osserva inoltre che $\mathrm{Im}\,(f) = [0,3]$. Per determinare la funzione inversa f^{-1} occorre invertire separatamente le restrizioni di f agli intervalli $[0,1[$ e $[1,2]$, che per chiarezza chiameremo f_1 e f_2. Per ogni $x \in [0,1[$ si ha $f^{-1}(x) = f_1^{-1}(x) = y$ se e solo se $f_1(y) = x$, con $y \in [0,1[$, ovvero $y^2 = x$; ricavando y si ha quindi $f^{-1}(x) = f_1^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Per ogni $x \in [1,3]$ si ha $f^{-1}(x) = f_2^{-1}(x) = y$ se e solo se $f_2(y) = x$, con $y \in [1,2]$, ovvero $5 - 2y = x$; ricavando y si ha quindi $f^{-1}(x) = f_2^{-1}(x) = \frac{5-x}{2}$. Pertanto

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \in [0,1[\\ \\ \frac{5-x}{2} & \text{se } x \in [1,3] \end{cases}$$

Il grafico di f è riportato in figura 11.

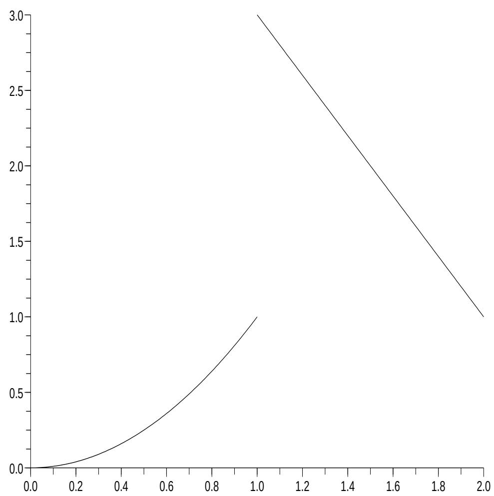

Fig. 11: Grafico di f (esercizio 15)

16) Consideriamo $f(x) = x^2$ e le rispettive restrizioni $f_1 = f_{|\mathbb{R}^-}$, $f_2 = f_{|\mathbb{R}^+}$. Per verificare che f_2 è strettamente crescente su $\mathbb{R}^+$ si può procedere come nell'esercizio 15. Analogamente si verifica che f_1 è strettamente decrescente su $\mathbb{R}^+$. Si ha inoltre $\mathrm{Im}\,(f_1) = \mathrm{Im}\,(f_2) = \mathbb{R}^+$. Calcoliamo ora le funzioni inverse g_1, g_2. Per definizione, per ogni $x \in \mathbb{R}^+$ si ha $g_1(x) = y$ se e solo se $f_1(y) = x$ con $y \in \mathbb{R}^-$, ovvero $y^2 = x$, $y \leq 0$. Esplicitando y in funzione di x si ha quindi $y = g_1(x) = -\sqrt{x}$. In modo analogo si trova $y = g_2(x) = \sqrt{x}$, per ogni $x \in \mathbb{R}^+$. I grafici delle funzioni inverse sono simmetrici di quelli delle funzioni date, rispetto alla retta $y = x$ e sono riportati in figura 12.

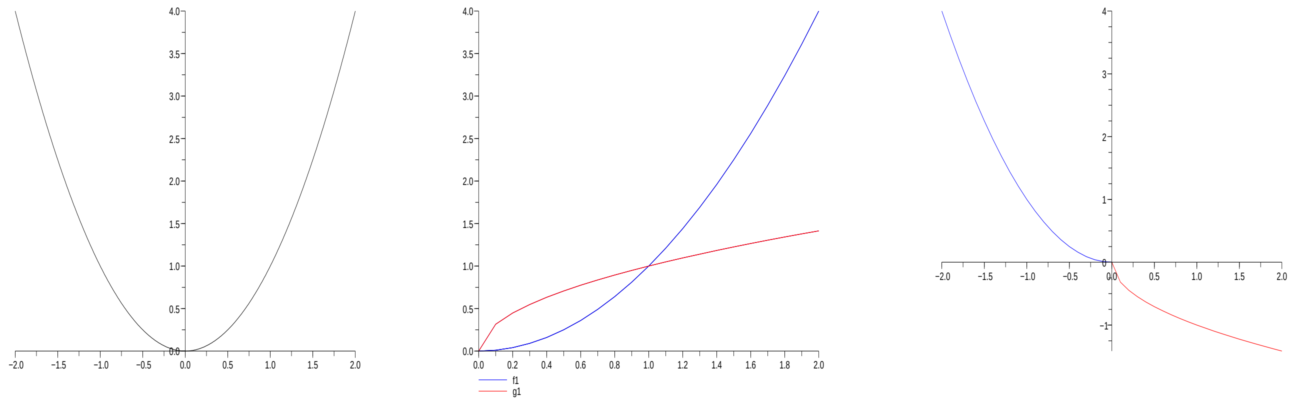

Fig. 12: Grafico di $f(x) = x^2$, f_1, g_1, f_2, g_2 (esercizio 16)

17) Data $f(x) = x|x-2| + 2x$, possiamo riscrivere esplicitamente

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x & \text{se } x < 2 \\ x^2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Il grafico di f è riportato in figura 13. Per verificare che f è invertibile, osserviamo che la restrizione $f_1(x) = -x^2 + 4x = 4 - (x-2)^2$ di f a $]-\infty, 2[$ è strettamente crescente. Analogamente la restrizione $f_2(x) = x^2$ di f a $[2, +\infty[$ è strettamente crescente. Inoltre $\mathrm{Im}\,(f_1) =]-\infty, 4[$, e $\mathrm{Im}\,(f_2) = [4, +\infty[$. Pertanto f risulta iniettiva, suriettiva e strettamente crescente. Per determinare la funzione inversa f^{-1} operiamo separatamente con le due restrizioni. Per ogni $x \in]-\infty, 4[$ poniamo $f_1^{-1}(x) = y$ se e solo se $f_1(y) = x$, con $y \in]-\infty, 2[$ ovvero $-y^2 + 4y = x$ e $y \in]-\infty, 2[$. Risolvendo l'equazione di secondo grado rispetto all'incognita y si trovano due soluzioni $y_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-x}$ e di queste solo $y = 2 - \sqrt{4-x}$ soddisfa la condizione $y \in]-\infty, 2[$. Pertanto abbiamo

$$f_1^{-1} :]-\infty, 4[\to]-\infty, 2[\quad , \quad y = f_1^{-1}(x) = 2 - \sqrt{4-x}$$

Per determinare la funzione $f_2^{-1}(x)$ per ogni $x \in [4, +\infty[$ poniamo $f_2^{-1}(x) = y$ se e solo se $f_2(y) = x$, con $y \in [2, +\infty[$ ovvero $y^2 = x$ e $y \in [2, +\infty[$. Si ricava subito $y = f_2^{-1}(x) = \sqrt{x}$, per ogni $x \in [4, +\infty[$. Quindi

$$f_2^{-1} : [4, +\infty[\to [2, +\infty[\quad , \quad y = f_2^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

Complessivamente

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 2 - \sqrt{4 - x} & \text{se } x \in] - \infty, 4[\\ \\ \sqrt{x} & \text{se } x \in [4, +\infty[\end{cases}$$

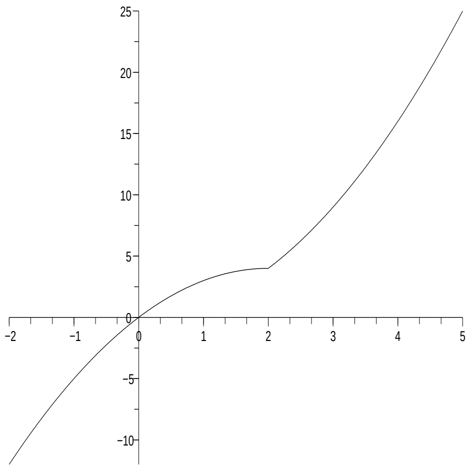

Fig. 13: Grafico di $f(x) = x|x - 2| + 2x$ (esercizio 17)

18) Data $f(x) = (x - 1)|x + 2|$, scriviamo esplicitamente la sua espressione

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - x + 2 & \text{se } x < -2 \\ \\ x^2 + x - 2 & \text{se } x \geq -2 \end{cases}$$

Consideriamo le funzioni $f_1(x) = -x^2 - x + 2$ e $f_2(x) = x^2 + x - 2$. La funzione

$$f_1(x) = \frac{9}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

è strettamente crescente per $x < 1/2$ e strettamente decrescente per $x \geq 1/2$. Per $f_2 = -f_1$ si ha ovviamente che è strettamente decrescente per $x < 1/2$ e strettamente crescente per $x \geq 1/2$. Per f concludiamo quindi che è strettamente decrescente per $-2 < x < 1/2$ e strettamente crescente per $x \leq -2$ e $x \geq 1/2$. Possiamo quindi determinare 3 restrizioni invertibili, che chiameremo $F_1 = f_{|]-\infty,-2]}$, $F_2 = f_{|]-2,1/2[}$, $F_3 = f_{|[1/2,+\infty[}$. Le corrispondenti immagini sono

$$\mathrm{Im}\,(F_1) = f(]-\infty,-2]) =]-\infty,0]$$

$$\mathrm{Im}\,(F_2) = f(]-2,1/2[) =]-\frac{9}{4},0[$$

$$\mathrm{Im}\,(F_3) = f([1/2,+\infty[) = [-\frac{9}{4},+\infty[$$

Per calcolare le funzioni inverse corrispondenti, ricordando che $f^{-1}(x) = y$ se e solo se $f(y) = x$, abbiamo

$$F_1^{-1} :]-\infty,0] \to]-\infty,-2], \quad F_1^{-1}(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - x}$$

$$F_2^{-1} :]-\frac{9}{4},0] \to]-2,1/2[, \quad F_2^{-1}(x) = \frac{1}{2} - \sqrt{x + \frac{9}{4}}$$

$$F_3^{-1} :]-\frac{9}{4},+\infty[\to [1/2,+\infty[, \quad F_3^{-1}(x) = \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{9}{4}}$$

19) Per verificare che la funzione $f(x) = x^4$ è limitata su $[-2,3]$, osserviamo che $x^4 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ovvero f è inferiormente limitata su $\mathbb{R}$; inoltre f è strettamente decrescente su $\mathbb{R}^-$ e strettamente crescente su $\mathbb{R}^+$. Pertanto, per $x \in [-2,0]$ si ha $0 \leq x^4 \leq 16$, e per $x \in [0,3]$ si ha $0 \leq x^4 \leq 81$: complessivamente abbiamo che per $x \in [-2,3]$ si ha $0 \leq x^4 \leq 81$. Per verificare che f è superiormente illimitata su $\mathbb{R}$ osserviamo che $\mathrm{Im}\,(f) = [0,+\infty[$, in quanto per ogni $y \in [0,+\infty[$ esiste almeno una soluzione dell'equazione $f(x) = y$, ovvero $x^4 = y$; di fatto tale equazione ha in generale due soluzioni $x = \pm\sqrt[4]{y}$.

20) La funzione $f(x) = \left|\frac{1}{x} + 1\right|$ ha dominio $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Per tracciarne il grafico è utile riscrivere esplicitamente l'espressione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + 1 & \text{se } x \leq -1 \text{ o } x > 0 \\ -\frac{1}{x} - 1 & \text{se } -1 < x < 0 \end{cases}$$

Il grafico di $y = \frac{1}{x} + 1$ è un'iperbole equilatera. Il grafico di f è riportato in figura 14. Per verificare che f è inferiormente limitata sul suo dominio basta osservare che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathrm{dom}(f)$. Per determinare $\min\{f(x) : x \in \mathrm{dom}(f)\}$ osserviamo che $f(-1) = 0 \leq f(x)$ per ogni $x \in \mathrm{dom}(f)$, ovvero $x = -1$ è punto di minimo assoluto di f. Per verificare che f è superiormente illimitata sul suo dominio, basta notare che $\mathrm{Im}\,(f) = [0,+\infty[$, in quanto per ogni $y \geq 0$ esiste $x \in \mathrm{dom}(f)$ tale che $f(x) = y$. Infine osserviamo che $\sup\{f(x) : x \in]-\infty,-1]\} = 1$, in quanto per $x \in]-\infty,-1]$ si ha $\frac{1}{x} < 0$ e quindi $f(x) = \frac{1}{x} + 1 < 1$:

ciò significa che il valore 1 è un maggiorante di f sull'insieme $]-\infty,-1]$. Per stabilire se 1 è estremo superiore osserviamo che $f(]-\infty,-1])=[0,1[$: infatti per ogni $y\in[0,1[$ esiste almeno una soluzione $x\in]-\infty,-1]$ dell'equazione $f(x)=y$, ovvero $\frac{1}{x}+1=y$. Tale equazione ha la soluzione $x=\frac{1}{y-1}$. Concludiamo infine che il valore 1 non è massimo di f sull'intervallo $]-\infty,-1]$ perchè l'equazione $\frac{1}{x}+1=1$ non ha alcuna soluzione.

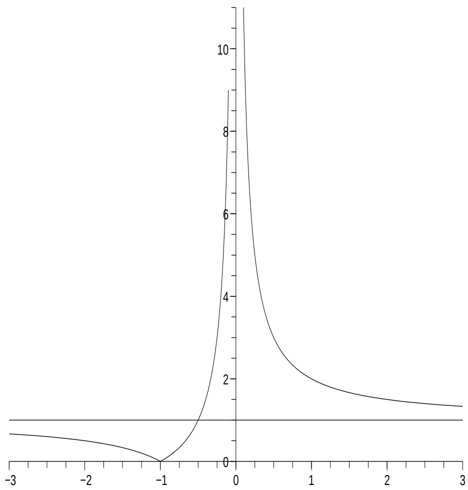

Fig. 14: Grafico di $f(x)=\left|\frac{1}{x}+1\right|$ (esercizio 20)

21) Sono date le funzioni $f(x)=x-\sqrt{x}$ e $g(x)=\sqrt{x-2}$. I rispettivi domini sono

$$\mathrm{dom}(f)=[0,+\infty[\quad,\quad \mathrm{dom}(g)=[2,+\infty[$$

Il dominio di $g\circ f$ per definizione è $\mathrm{dom}(g\circ f)=\{x\in\mathrm{dom}(f):f(x)\in\mathrm{dom}(g)\}=\{x\in[0,+\infty[:x-\sqrt{x}\geq 2\}=[4,+\infty[$. Analogamente il dominio di $f\circ g$ è $\mathrm{dom}(f\circ g)=\{x\in\mathrm{dom}(g):g(x)\in\mathrm{dom}(f)\}=\{x\in[2,+\infty[:\sqrt{x-2}\geq 0\}=[2,+\infty[$. Inoltre $(g\circ f)(x)=\sqrt{x-\sqrt{x}-2}$, e $(f\circ g)(x)=\sqrt{x-2}-\sqrt[4]{x-2}$.

22) Sono date le funzioni $f(x)=x^2+3x$ e $g(x)=|x|$. Entrambe hanno dominio $\mathbb{R}$. Inoltre $\mathrm{dom}(g\circ f)=\mathbb{R}$ e $\mathrm{dom}(f\circ g)=\mathbb{R}$. Le espressioni esplicite delle funzioni composte sono $(g\circ f)(x)=|x^2+3x|$ e $(f\circ g)(x)=x^2+3|x|$. Il grafico di $g\circ f$ si ottiene da quello di $y=x^2+3x$ ribaltando rispetto all'asse x le parti corrispondenti ad ordinate negative. Quello di $f\circ g$ si può ottenere da quello di $y=x^2+3x$, tenendo conto che coincide con esso per $x\geq 0$ e risulta simmetrico rispetto all'asse y.

I grafici di $g \circ f$ e $f \circ g$ sono riportati in figura 15.

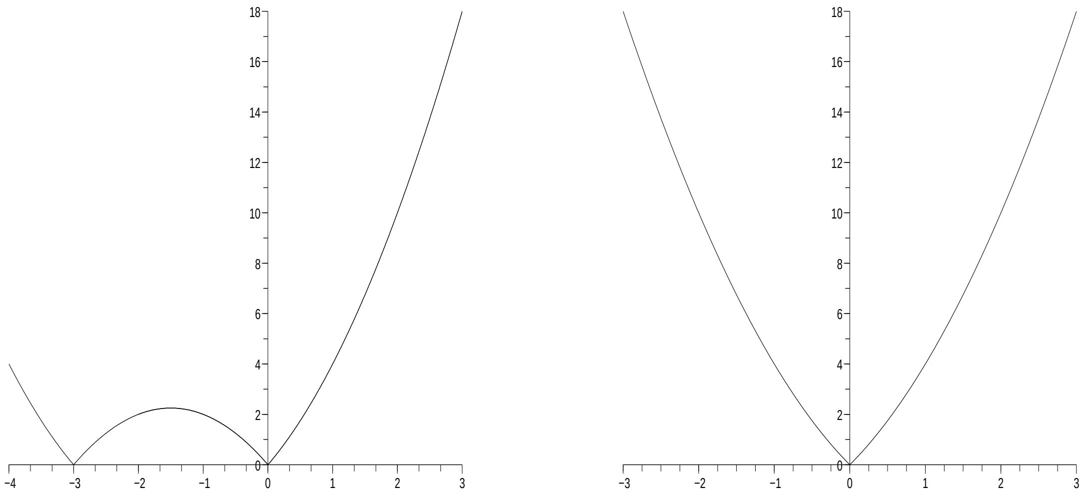

Fig. 15: Grafico di $g \circ f$, $f \circ g$ (esercizio 22)

23) Sono date le funzioni $f(x) = 1 + x^2$, $g(x) = \frac{1}{x}$. Si ha facilmente che $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$, $\text{dom}(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\text{Im}\,(f) = [1, +\infty[$, $\text{Im}\,(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. La funzione f è strettamente decrescente su $\mathbb{R}^-$ e strettamente crescente su $\mathbb{R}^+$. La funzione g è strettamente decrescente su $]-\infty, 0[$ e su $]0, +\infty[$. La funzione composta $g \circ f$ ha dominio $\text{dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$, e immagine $\text{Im}\,(g \circ f) = g([1, +\infty[) =]0, 1]$. Infine, sfruttando le proprietà sulla composizione di funzioni monotone, si trova che $g \circ f$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}^-$ e strettamente decrescente su $\mathbb{R}^+$. Il grafico è riportato in figura 16.

24) Sono date le funzioni $f(x) = -\frac{1}{x}$, $g(x) = e^x$. Si ha facilmente che $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\text{dom}(g) = \mathbb{R}$, $\text{Im}\,(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\text{Im}\,(g) =]0, +\infty[$. La funzione f è strettamente crescente su $]-\infty, 0[$ e su $]0, +\infty[$. La funzione g è strettamente crescente su $\mathbb{R}$. La funzione composta $g \circ f$ ha dominio $\text{dom}(g \circ f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e immagine $\text{Im}\,(g \circ f) = g(\mathbb{R} \setminus \{0\}) =]0, +\infty[\setminus \{1\}$. Infine, sfruttando le proprietà sulla composizione di funzioni monotone, si trova che $g \circ f$ è strettamente crescente su $]0, 1[$ e su $]1, +\infty[$. Il grafico è riportato in figura 17.

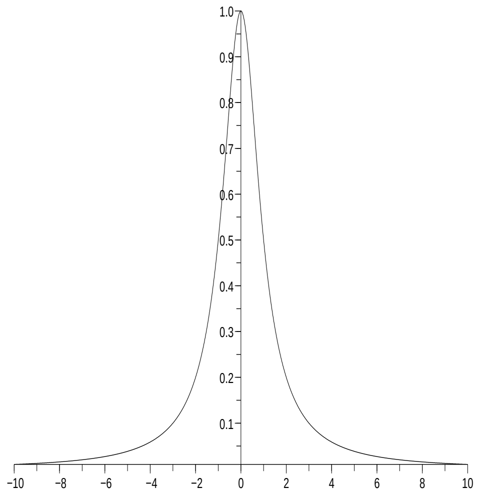

Fig. 16: Grafico di $g \circ f$ (esercizio 23)

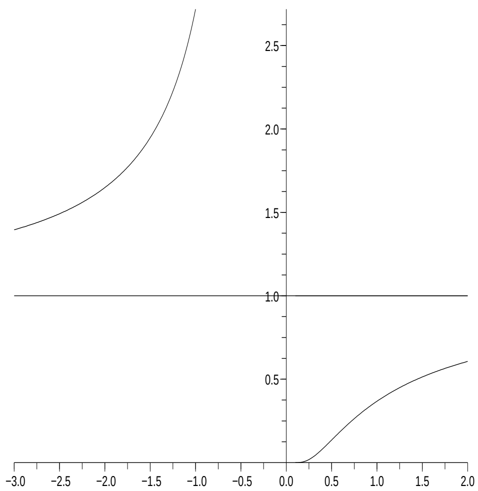

Fig. 17: Grafico di $g \circ f$ (esercizio 24)