§1 - CONFRONTO LOCALE: I SIMBOLI DI LANDAU

Nello studio del comportamento di una funzione vicino ad un punto x_0, dopo aver visto se la funzione ammette limite (finito, nullo o infinito), per $x \to x_0$, può interessare *come* la funzione tende a tale valore. Inoltre, se si studiano due funzioni f e g, entrambe definite in un intorno di x_0 escluso al più il punto x_0 stesso, ha interesse studiare se c'è relazione tra i loro limiti (ammesso che esistano), per $x \to x_0$. Le definizioni che seguono precisano proprio questa indagine.

Le funzioni f, g, h ... che consideriamo sono tutte definite e *non nulle* in un intorno U del punto x_0, escluso al più il punto x_0 stesso.

DEFINIZIONE 1
$f(x)$ **è equivalente a** $g(x)$ per $x \to x_0$ (in simboli:$f \sim g \quad (x \to x_0)$) se :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

ESEMPI

a) $3x^2 + 5x \sim 5x$, per $x \to 0$
b) $3x^2 + 5x \sim 3x^2$, per $x \to \pm\infty$
c) $\sin x \sim \tan x \sim x \sim \log(1 + x)$, per $x \to 0$
d) $3x + \sqrt{x} \sim \sqrt{x}$, per $x \to 0$
e) $x^3 + \sin x \sim x^3$, per $x \to \pm\infty$
f) $\log x \sim (x - 1)$, per $x \to 1$

DEFINIZIONE 2
$f(x)$ **è dello stesso ordine di grandezza di** $g(x)$ per $x \to x_0$ (in simboli:$f \asymp g \quad (x \to x_0)$) se :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0 \quad l \in \mathbf{R}$$

ESEMPI

a) $1 - \cos x \asymp x^2$ per $x \to 0$
b) $\sin 2x \asymp x$ per $x \to 0$
c) $3x^3 - 5x^2 + x \asymp 5x^3 + 7x^2 - 1 \asymp x^3$ per $x \to \pm\infty$
d) $\sqrt{2x^2 + x} \asymp |x|$ per $x \to \pm\infty$
e) $\log x \asymp 2x - 2$ per $x \to 1$

Si osservi che se f e g sono entrambe infinitesime (oppure infinite) (per $x \to x_0$) non è detto che siano equivalenti, né dello stesso ordine di grandezza.
Si considerino, ad esempio, le due funzioni $f(x) = x, g(x) = x^2$ per $x \to 0$ oppure per $x \to +\infty$
Le relazioni $\sim$ e $\asymp$ forniscono quindi risultati nuovi se applicate alle funzioni infinitesime o infinite.

ALCUNE PROPRIETA' DELLE RELAZIONI $\sim$, $\asymp$ $\quad (x \to x_0)$

a) $f \sim f$

b) $f \sim g \Rightarrow g \sim f$

c) $f \sim g \ \wedge \ g \sim h \Rightarrow f \sim h$

d) $f \to l \neq 0 \ \wedge \ g \to l \neq 0 \Rightarrow f \sim g$

e) $f \to l \ \wedge \ g \sim f \Rightarrow g \to l$

f) $f_1 \sim g_1 \ \wedge \ f_2 \sim g_2 \Rightarrow f_1 f_2 \sim g_1 g_2$

g) $f_1 \sim g_1 \wedge f_2 \sim g_2 \ \Big(f_2, g_2 \neq 0 \text{ in } \mathrm{U}(x_0)\Big) \Rightarrow \dfrac{f_1}{f_2} \sim \dfrac{g_1}{g_2}$

a') $f \asymp f$

b') $f \asymp g \Rightarrow g \asymp f$

c') $f \asymp g \ \wedge \ g \asymp h \Rightarrow f \asymp h$

d') $f \to l \neq 0 \ \wedge \ g \to m \neq 0 \Rightarrow f \asymp g$

e') $f \to 0$ (o $f \to +\infty$) $\wedge \ g \asymp f \Rightarrow g \to 0$ (o $g \to +\infty$)

f') $f_1 \asymp g_1 \ \wedge \ f_2 \asymp g_2 \Rightarrow f_1 f_2 \asymp g_1 g_2$

g') $f_1 \asymp g_1 \wedge f_2 \asymp g_2 \ \Big(f_2, g_2 \neq 0 \text{ in } \mathrm{U}(x_0)\Big) \Rightarrow \dfrac{f_1}{f_2} \asymp \dfrac{g_1}{g_2}$

h) $f \sim g \Rightarrow f \asymp g$

OSSERVAZIONI

a) L'implicazione h) non è invertibile. Ad esempio, se $f(x) = \sin x$ e $g(x) = x$, si ha: $f(x) \sim g(x)$ (e quindi $f(x) \asymp g(x)$), per $x \to 0$.
Invece, se $f(x) = \sin(3x)$ e $g(x) = x$, si ha $f(x) \asymp g(x)$ ma non $f(x) \sim g(x)$, per $x \to 0$.

b) Non vale la proprietà additiva, né per la relazione $\sim$ né per $\asymp$, cioè se $f_1 \sim g_1 \wedge f_2 \sim g_2$ non è detto che $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$. La stessa cautela vale per la relazione $\asymp$. Ad esempio si considerino le funzioni $f_1(x) = x$, $g_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2 - x$, $g_2(x) = x^3 - x$, per $x \to 0$.

DEFINIZIONE 3

$f(x)$ **è** o**-piccolo di** $g(x)$ per $x \to x_0$ (in simboli: $f = o(g) \quad x \to x_0$) se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

(Si dice anche che f **è trascurabile rispetto a** g per $x \to x_0$.)

OSSERVAZIONE: $f = o(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, cioè $f = o(1) \Leftrightarrow f$ è INFINITESIMA per $x \to x_0$.
Analogamente, $1 = o(f) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, cioè $1 = o(f) \Leftrightarrow f$ è INFINITA per $x \to x_0$.

ESEMPI

a) $x^2 = o(x)$ per $x \to 0$

b) $x = o(x^2)$ per $x \to \infty$

c) $1 - \cos x = o(x)$ per $x \to 0$

d) $\dfrac{1}{x^2} = o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ per $x \to \infty$

ALCUNE PROPRIETA' DELLA RELAZIONE o**-piccolo** $\quad (x \to x_0)$

a) $f = o(g) \ \wedge \ g = o(h) \Rightarrow f = o(h)$

b) $f_1 = o(g_1) \ \wedge \ f_2 = o(g_2) \Rightarrow f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$

c) $f_1 \asymp g_1 \ \wedge \ f_2 = o(g_2) \Rightarrow f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$

d) $f \sim g \Leftrightarrow f - g = o(g)$

Ad esempio:

per $x \to 0 \quad 1 - \cos x = o(x)$, $\sin(x^2) = o(x)$; quindi $(1 - \cos x)\sin(x^2) = o(x^2)$;

per $x \to 0 \quad 1 - \cos x = o(x)$ e quindi $x(1 - \cos x) = o(x^2)$;

per $x \to 0 \quad \sin x \sim x$ e, equivalentemente, $\sin x = x + o(x)$;

L'introduzione dei concetti di funzione trascurabile e di funzione equivalente a un'altra consente di semplificare il calcolo dei limiti. Valgono infatti le due proprietà seguenti:

PRINCIPIO DI ELIMINAZIONE DEI TERMINI TRASCURABILI.

Supponiamo che $f_1(x) = o(f(x))$, $g_1(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$. Allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) + f_1(x))}{(g(x) + g_1(x))} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

L'applicazione del principio di eliminazione dei termini trascurabili, nel calcolo di un limite, consiste appunto nel trascurare in una somma, sia a numeratore che a denominatore, i termini trascurabili (ad esempio gli infinitesimi di ordine superiore, se f, g, f_1, g_1 sono infinitesimi per $x \to x_0$, ovvero gli infiniti di ordine inferiore, se f, g, f_1, g_1 sono infiniti per $x \to x_0$).
Così, ad esempio, si ha:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x + x^2)}{(2x - x^3)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \; ; \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{(3 - x + x^2)}{(7 - 2x - x^3)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{-x^3} = -\infty.$$

PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE CON FUNZIONI EQUIVALENTI

Supponiamo che $f_1(x) \sim f(x)$, $g_1(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$. Allora;

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \to x_0} f_1(x)g_1(x)$$

Inoltre, se $\Big(g, g_1 \neq 0 \text{ in } \mathrm{U}(x_0)\Big)$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Cioè: nel calcolo del limite del prodotto (o quoziente) di funzioni si possono sostituire le funzioni con altre ad esse equivalenti.
Ad esempio:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\frac{x^2}{2}} = 2$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 4x \cdot \log(1 + 6x)}{(1 - e^{2x}) \cdot \sin 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{4x \cdot 6x}{-2x \cdot 3x} = -4$$

<u>ATTENZIONE:</u> non si può usare nelle somme il principio di sostituzione con funzioni equivalenti.
Ad esempio:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\tan x}{x^3} - \frac{\sin x}{x^3} \right) \neq \lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{x^3} - \frac{x}{x^3} \right) = 0$$

Si ha invece:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \frac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{1}{2}$$

§2 - CONFRONTO DI INFINITESIMI E DI INFINITI

Consideriamo le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ che per $x \to x_0$ tendono a zero (oppure a infinito); ha interesse stabilire un confronto fra di esse per conoscere se una delle due funzioni tende a zero (o a infinito) "più rapidamente" dell'altra o entrambe tendono a zero (o a infinito) "nello stesso modo". Si parla di *ordine di infinitesimo* (oppure di *ordine di infinito*) delle due funzioni , per $x \to x_0$, e lo si denota con ord(f) e ord(g) (oppure con Ord(f) , Ord(g)).

Più precisamente, se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni entrambe infinitesime (per $x \to x_0$) e se $g(x) \neq 0$ in un intorno U(x_0), diamo le seguenti :

DEFINIZIONI

1) f **è un INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE a** g se $f = o(g)$, cioè se $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

2)f **e** g **sono INFINITESIMI DELLO STESSO ORDINE** se $f \asymp g$, cioè se $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$

3)f **è un INFINITESIMO DI ORDINE INFERIORE a** g se $g = o(f)$, cioè se $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$

ESEMPI

a) Siano $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^2$. Si vede subito che ord$(f) >$ ord (g) (per $x \to 0$); infatti: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x^2} = 0$

In generale, se $p_n(x)$ e $q_m(x)$ sono due polinomi di grado, rispettivamente, n ed m senza termine noto (e dunque infinitesimi per $x \to 0$), si ha:

$$\text{ord }(p_n) > \text{ord }(q_m) \Leftrightarrow \ n > m$$

b) Le due funzioni $f(x) = 1 - \cos x$ e $g(x) = x^2$ sono infinitesime dello stesso ordine per $x \to 0$, poiché

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

c) ord $(\log x) =$ ord $(x - 1)$, per $x \to 1$. Infatti: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\log x}{x - 1} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\log(1 + t)}{t} = 1$

In modo analogo, se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni entrambe infinite (per $x \to x_0$) e se $g(x) \neq 0$ in un intorno U(x_0), diamo le seguenti :

DEFINIZIONI

1) f è **INFINITO di ORDINE INFERIORE** a g (e scriviamo Ord(f) <Ord(g)) se $f = o(g)$, cioè se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

2) f e g sono **INFINITI DELLO STESSO ORDINE** (e scriviamo Ord$(f) =$ Ord(g)) se $f \asymp (g)$, cioè se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$$

3) f è **INFINITO di ORDINE SUPERIORE** a g (e scriviamo Ord$(f) =$ Ord(g)) se $g = o(f)$, cioè se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

ESEMPI

a) Siano $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^2$. Si vede subito che $\mathrm{Ord}(f) > \mathrm{Ord}\ (g)$ (per $x \to \infty$).

In generale, se $p_n(x)$ e $q_m(x)$ sono due polinomi qualunque di grado, rispettivamente, n ed m , si ha:

$$\mathrm{Ord}\ (p_n) > \mathrm{Ord}\ (q_m) \Leftrightarrow\ n > m \quad \text{e} \quad \mathrm{Ord}\ (p_n) = \mathrm{Ord}\ (q_m) \Leftrightarrow\ n = m$$

b) $\mathrm{Ord}(\sqrt{x}) < \mathrm{Ord}(\sqrt[3]{x^2}) < \mathrm{Ord}(x) < \mathrm{Ord}(\sqrt{x^3}) < \ldots$ per $x \to +\infty$

c) $\mathrm{Ord}(\tan x) = \mathrm{Ord}\left(\dfrac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right)$, per $x \to \dfrac{\pi}{2}$. Infatti, operando la sostituzione $x - \dfrac{\pi}{2} = t$, si ha:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}} = \lim_{t\to 0} \frac{\tan(t+\frac{\pi}{2})}{\frac{1}{t}} = -\lim_{t\to 0}(t\cot t) = -\lim_{t\to 0}\left(\cos t \cdot \frac{t}{\sin t}\right) = -1$$

Comportamento di Esponenziali e Logaritmi

Le funzioni esponenziali e logaritmo si comportano in modo particolare rispetto alle funzioni polinomiali.

Fissiamo l'attenzione sulle funzioni esponenziale e logaritmo con base $a > 1$.

Si può provare che:

- *l'esponenziale ha ordine di infinito superiore a qualunque potenza di x, per $x \to +\infty$*
- *l'esponenziale ha ordine di infinitesimo superiore a qualunque potenza di $\frac{1}{|x|}$, per $x \to -\infty$*
- *il logaritmo ha ordine di infinito inferiore a qualunque potenza di x, per $x \to +\infty$*
- *il logaritmo ha ordine di infinito inferiore a qualunque potenza di $\frac{1}{x}$, per $x \to 0^+$*

In simboli, $\forall a > 1$, $\forall k \in \mathbf{R}_+$:

a) $\mathrm{Ord}\ (a^x) >\ \mathrm{Ord}\ (x^k)$ per $x \to +\infty$, ovvero $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^k} = +\infty$

b) $\mathrm{ord}\ (a^x) >\ \mathrm{ord}\ \left(\frac{1}{|x|^k}\right)$ per $x \to -\infty$, ovvero $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{a^x}{\frac{1}{|x|^k}} == \lim_{x\to-\infty} |x|^k a^x = 0$

c) $\mathrm{Ord}\ (\log_a x) <\ \mathrm{Ord}\ (x^k)$ per $x \to +\infty$, ovvero $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^k} = 0$

d) $\mathrm{Ord}\ (\log_a x) <\ \mathrm{Ord}\ \left(\frac{1}{x^k}\right)$ per $x \to 0^+$, ovvero $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log_a x}{\frac{1}{x^k}} == \lim_{x\to 0^+} x^k \log_a x = 0$

E' facile dedurre che, **se consideriamo basi** $0 < a < 1$, abbiamo, $\forall k \in \mathbf{R}_+$:

a) $\mathrm{Ord}\ (a^x) >\ \mathrm{Ord}\ (|x|^k)$ per $x \to -\infty$, ovvero $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{a^x}{|x|^k} = +\infty$

b) $\mathrm{ord}\ (a^x) >\ \mathrm{ord}\ \left(\frac{1}{x^k}\right)$ per $x \to +\infty$, ovvero $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{\frac{1}{x^k}} == \lim_{x\to+\infty} x^k a^x = 0$

c) $\mathrm{Ord}\ (\log_a x) <\ \mathrm{Ord}\ (x^k)$ per $x \to +\infty$, ovvero $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^k} = 0$

d) $\mathrm{Ord}\ (\log_a x) <\ \mathrm{Ord}\ \left(\frac{1}{x^k}\right)$ per $x \to 0^+$, ovvero $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log_a x}{\frac{1}{x^k}} == \lim_{x\to 0^+} x^k \log_a x = 0$

OSSERVAZIONI

a) Esistono infiniti di ordine ancora maggiore di e^x (ad esempio e^{e^x}) oppure di ordine inferiore a $\log x$, come $\log(\log x)$.

b) Se $a > b > 1$ si ha che $\mathrm{Ord}\ (a^x) >\ \mathrm{Ord}\ (b^x)$, per $x \to +\infty$,; infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{b^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^x = +\infty \text{ in quanto } \tfrac{a}{b} > 1$$

c) Le funzioni logaritmo invece hanno sempre lo stesso ordine di infinito, qualunque sia la base; infatti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{\log_b x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{\frac{\log_a x}{\log_a b}} = \log_a b$$

§3 - ORDINE E PARTE PRINCIPALE RISPETTO AD UN CAMPIONE

Quando si renda utile non solo avere una misura relativa di infinitesimo o di infinito (confrontando cioè tra loro due funzioni f e g entrambe infinitesime o infinite in un punto x_0), ma anche poter "misurare la velocità" con cui una singola funzione f tende a zero - o a infinito - per $x \to x_0$, si introduce una "unità di misura" degli infinitesimi o degli infiniti, dette *infinitesimo campione* e *infinito campione*.

Gli *infinitesimi campione standard* sono:

per $x \to x_0$ $\qquad u(x) = |x - x_0|$

per $x \to \infty$ $\qquad u(x) = \frac{1}{|x|}$

Gli *infiniti campione standard* sono:

per $x \to x_0$ $\qquad U(x) = \frac{1}{|x-x_0|}$

per $x \to \infty$ $\qquad U(x) = |x|$

Diamo adesso la seguente :

Definizione. Si dice che f è un **infinitesimo di ordine** $\alpha \in \mathbf{R}_+$ rispetto all'infinitesimo campione $u(x)$, (per $x \to x_0$), se $f(x) \asymp [u(x)]^\alpha$ per $x \to x_0$, ovvero se $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{[u(x))]^\alpha} = \ell \quad , \quad \ell \neq 0,\ \ell \in \mathbf{R}$.

Sotto tale ipotesi risulta anche:

$$f(x) = \ell(u^\alpha(x)) + o(u^\alpha(x))$$

La funzione $p(x) = \ell(u^\alpha(x))$ si dice **parte principale** di $f(x)$ per $x \to x_0$, mentre con il termine $o(u^\alpha(x))$ si indica un infinitesimo di ordine superiore ad α rispetto all'infinitesimo campione $u(x)$.

In modo analogo, riguardo agli infiniti:

Definizione. Si dice che f è un **infinito di ordine** $\alpha \in \mathbf{R}_+$ rispetto all'infinito campione $U(x)$, (per $x \to x_0$), se $f(x) \asymp [U(x)]^\alpha$ per $x \to x_0$, cioè se $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{[U(x)]^\alpha} = \ell \quad , \quad \ell \neq 0,\ \ell \in \mathbf{R}$.

Sotto tale ipotesi risulta anche:

$$f(x) = \ell\,(U^\alpha(x)) + o\,(U^\alpha(x))$$

La funzione $P(x) = \ell\,(U^\alpha(x))$ si dice **parte principale** di $f(x)$ per $x \to x_0$, mentre con il termine $o(U^\alpha(x))$ si indica un infinito di ordine inferiore ad α rispetto all'infinito campione $U(x)$.

ESEMPI

1) $f(x) = \sqrt{x}$ per $x \to 0^+$ è un infinitesimo di ordine $\alpha = \frac{1}{2}$ rispetto all'infinitesimo campione x poiché $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt{x}}{(x^\alpha)} = 1$, se $\alpha = \frac{1}{2}$

2) Un polinomio di grado n , $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_m x^m$, $a_m \neq 0,\ m \neq 0$ è infinitesimo di ordine m per $x \to 0$ (rispetto all'infinitesimo campione $u(x) = |x|$) e la funzione $p(x) = a_m x^m$ è la sua parte principale.

3) $f(x) = \sin x$ per $x \to 0$ ha ordine di infinitesimo $\alpha = 1$ rispetto all'infinitesimo campione x ; infatti $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. La funzione $p(x) = x$ è la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.

4) La funzione $f(x) = \sqrt{x-1}$ ha ordine di infinitesimo $\frac{1}{2}$ per $x \to 1$, rispetto all'infinitesimo campione $x-1$; infatti: $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x-1}}{(x-1)^\alpha} = 1$ se $\alpha = \frac{1}{2}$.
Invece, la funzione $f(x) = \sqrt{x} - 1$ ha ordine di infinitesimo 1 per $x \to 1$, rispetto all'infinitesimo campione $x-1$; infatti: $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{(x-1)^\alpha} = \lim_{x\to 1} \dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)^\alpha(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} \lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{(x-1)^\alpha} = \dfrac{1}{2} \lim_{x\to 1}(x-1)^{1-\alpha} = \dfrac{1}{2}$ se $\alpha = 1$.

5) $f(x) = \dfrac{3x-5}{8x^3 - x^2 + 7}$ per $x \to -\infty$ è infinitesima di ordine 2 (rispetto all'infinitesimo campione $u(x) = \frac{1}{|x|}$; infatti: $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{\frac{3x-5}{8x^3-x^2+7}}{\left|\frac{1}{x}\right|^\alpha} = \dfrac{3}{8}$ se $\alpha = 2$. La funzione $p(x) = \frac{3}{8x^2}$ è la parte principale di $f(x)$ per $x \to -\infty$.

6) $f(x) = \sqrt{x}$ per $x \to +\infty$ è un infinito di ordine $\alpha = \frac{1}{2}$ rispetto all'infinito campione $U(x) = x$ poiché $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{(x^\alpha)} = 1$, se $\alpha = \frac{1}{2}$.

7) Un polinomio $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0$ è un infinito di ordine n per $x \to \infty$ (rispetto all'infinito campione $U(x) = |x|$) e la funzione $P(x) = a_n x^n$ è la sua parte principale.

8) $f(x) = 3x^2 + \arctan(3x)$ per $x \to +\infty$ è un infinito di ordine 2 rispetto all'infinito campione x poiché:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 + \arctan(3x)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x^2}{x^2} + \frac{\arctan(3x)}{x^2} \right) = 3$$
La funzione $P(x) = 3x^2$ è la parte principale di $f(x)$ per $x \to +\infty$.

9) $f(x) = \dfrac{3x^6 - 5x^2}{8x^4 - x^3}$ per $x \to 0$ è un infinito di ordine 1 (rispetto all'infinito campione $U(x) = \frac{1}{x}$; infatti:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{3x^6-5x^2}{8x^4-x^3}}{\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha} = 5 \quad \text{se } \alpha = 1.$$

10) $f(x) = \tan x$ per $x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$ è un infinito di ordine 1 , rispetto all'infinito campione $U(x) = \frac{1}{\left|x - \frac{\pi}{2}\right|}$, come risulta dall'esempio c) del §2.

11) Ripensando a quanto detto nel §2 sul comportamento particolare delle funzioni esponenziale e logaritmo, possiamo affermare che, rispetto agli infinitesimi e agli infiniti campione standard:

$\forall a \in \mathbf{R},\ a > 1,\ \forall k \in \mathbf{R}_+$ $\quad \mathrm{ord}(a^x) > k$ per $x \to -\infty$; $\quad \mathrm{Ord}(a^x) > k$ per $x \to +\infty$

$\forall a \in \mathbf{R},\ 0 < a < 1,\ \forall k \in \mathbf{R}_+$ $\quad \mathrm{Ord}(a^x) > k$ per $x \to -\infty$; $\quad \mathrm{ord}(a^x) > k$ per $x \to +\infty$

$\forall a \in \mathbf{R},\ a > 0,\ \forall k \in \mathbf{R}_+$ $\quad \mathrm{ord}(\log_a x) < k$ per $x \to 0^+$; $\quad \mathrm{Ord}(\log_a x) < k$ per $x \to +\infty$.

OSSERVAZIONI

Esistono inoltre funzioni "inclassificabili" ripetto ai campioni standard, pur essendo comprese nelle limitazioni della scala.
Ad esempio $f(x) = x \log x$:
rispetto al campione $U(x) = x$ l'ordine di infinito di $f(x)$ (per $x \to +\infty$) è > 1 , poiché $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x \log x}{x} = +\infty$; eppure l'ordine di $f(x)$ è minore di ogni numero > 1; infatti $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x\log x}{x^{1+\epsilon}} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{x^\epsilon} = 0, \quad \forall \epsilon > 0.$